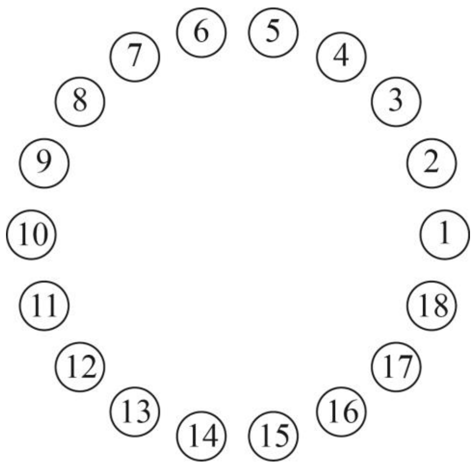
38 塗球遊戲…圓是最完美的圖形

義大利詩人但丁說過「圓是最完美的圖形」，圓的完美來自於它有一個圓心，而圓周完全對稱於圓心。阿基米德說「給我一個支點，我能將地球撬起來」，看似不可能，但在科學的意義是很深遠的，例如，只需給一個點，圓規的一隻腳壓在這點上，另一隻腳就可以畫出完美且對稱的圓。

這些故事都在說明，找到關鍵點或發現可用的科學概念，隱藏的和諧就變成看得見的和諧。在這裡，我們將討論一道圓周上的遊戲



這道遊戲是從東歐的遊戲演變而來。

將 18 *個白球圍成一圓圈，甲、乙兩人進行塗色遊戲，規則如下：*

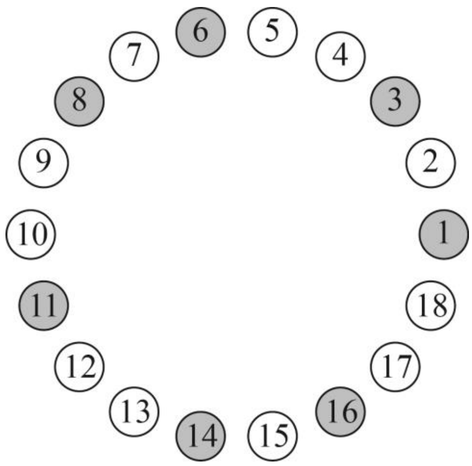
(1) *甲、乙輪流塗色，每次選取一個白球，把它塗成灰色。*

(2) *塗過灰色的球不能再塗。*

(3) *不能塗完色之後，發生相鄰兩球都是灰色的情形，這樣算違例。*

(4) *放棄或違例者輸。*

下圖是甲塗 4 *顆球，乙塗* 3 *顆球後的情形：*



塗球次序列表如下：

甲	3	11	6	16
乙	1	14	8	?

輪到乙選球塗色，顯然無法做到，所以甲勝。

試問：這塗球遊戲是先塗色的甲或慢點塗色的乙有必勝的策略呢？

在圓上的塗球遊戲是從直線上的塗球遊戲改良而來，直線上的塗球遊戲是指在下列直線排列的九個白球中

○○○○○○○○○

甲、乙兩人輪流選球塗成黑色，要求塗完之後不可以有兩個黑球相鄰。

試問：先塗色的甲或慢點塗色的乙有必勝的策略呢？事實上，先玩的甲在這直線的塗球遊戲上佔有優勢，他只要先將正中央的白球塗黑即可，如下圖所示：

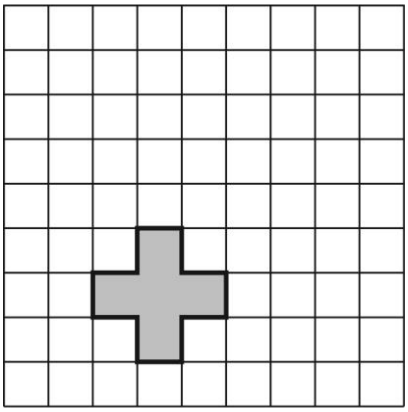
○○○○●○○○○

剩下就是使用對稱原理，即乙在左邊塗球，甲就對應地在右邊塗同一位置的球，相反的，當乙在右邊塗球，甲就對應地在左邊塗同一位置的球。不需幾回合，乙就會碰到困難，所以甲會贏。我們也可以將直線上的白球數增加，仿照對稱中央球的方法，只要白球數為奇數，那麼甲只需塗中央的白球，再利用點對稱原理，就可以贏得比賽。但是，當白球數為偶數時，遊戲就複雜許多了，而且未必後玩者輸。事實上，這直線上的塗球遊戲是源於東歐的遊戲，在白球數為偶數時，結果是不完全清楚的。

圓上的塗球遊戲是將直線遊戲拉成一個圓來玩，在 18 個球的情形，不難發現：1 與 10，2 與 11，3 與 12，4 與 13，5 與 14，6 與 15，7 與 16，8 與 17，9 與 18 剛好是直徑，也就是說，這 18 個球剛好對稱於圓心。所以當甲塗一個球之後，乙可以選與這球對稱的球來塗（直徑塗法），依照這樣的規律進行下去，只要甲可以選到球塗，乙也可以在對稱的位置選到球來塗。但是，這遊戲遲早會玩不下去，那個無球可塗的肯定是甲，所以乙會贏得比賽。

想想看！如果將 18 個球改成偶數個球，那麼結果為何？又若是奇數個球，則情形又怎樣？當筆者打字到這裡時，靈光乍現，忽然聯想到一道雷同的遊戲，就順手將它記錄下來，並取名為鋪十字形磁磚的比賽：

甲、乙兩人輪流在 9×9 的地上鋪十字形磁磚，規則如下：



(1) 輪流鋪十字形磁磚，每次一塊。

(2) 不可以鋪超出土地，也不可以與已鋪設的十字形磁磚有所重疊。

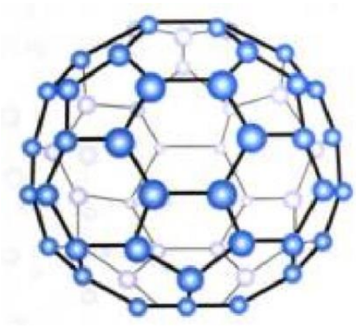
(3) 放棄或無法鋪設者輸。

問：誰可以贏得比賽，策略為何？（註：十字形磁磚無法蓋滿整個土地）

在鋪十字形磁磚的比賽中，甲只要先佔據正中央的地點，接下來就可以輕易的以點對稱的魔棒打敗對手，你想到了嗎？但是，如果土地是偶數邊形，那麼結果又如何呢？

我們也可以將圓上的塗球遊戲推廣到立體的球上，但是先要在球的表面勾勒出可以玩的鏡射線條。最典型容易想到的大概是足球上的線條，但是足球上的點不夠多，比賽很快就結束。這裡提供碳六十巴克球 C_{60}（俗稱奈米球）當模型，它是由 60 個碳原子所組成，

其結構如下圖中的左圖所示：



不難發現每個碳原子與三個碳原子相鄰，當選擇一個碳原子之後，其相鄰的三個碳原子就不准選取。在這樣的規則下，由於奈米球完全對稱於球心的關係，後玩者只需利用空間中對球心的點對稱原理就可以打敗對手。這種空間中有關球面的點對稱跟平面上有關圓周的點對稱，道理上是相通的。

談到空間，我們身處的世界就是一個典型的例子。前一陣子大家對梵谷的名畫「星夜」（上圖中的右圖）有許多天文上的討論，該畫是梵谷過逝前一年 1889 年在療養院畫的。拜近代天文望遠鏡所賜，天文學家發現:「星夜」畫中所纏繞的漩渦很像漩渦星系 M51，而且將星圖軟體調回 1889 年六月，將發現星星的相對位置大致與畫相吻合。唯一的差別是漩臂的纏繞方向與漩渦星系 M51 剛好相反，正確的說是呈現出空間中的點對稱。